



## Pemanfaatan Komputasi pada Pembelajaran Fisika dalam Merumuskan Dinamika Benda Ruang 3D

Melly Ariska

Dosen (Universitas Sriwijaya dan Jln. Hasan Bastari Perum. Arcadia)  
Jalan Raya Palembang-Prabumulih KM 32 Indralaya email: [ariska.melly@yahoo.com](mailto:ariska.melly@yahoo.com).

**Abstrak:** Telah diturunkan persamaan gaya-gaya pada gerak benda ruang 3D (*tippe top*) dengan metode Euler-Lagrange dengan memanfaatkan komputer, dan telah pula dilakukan komputasi dalam pencarian solusi numerik gaya-gaya pada dinamika *tippe top* dengan menggunakan program Maple. Analisis dinamika *tippe top* dapat menggunakan penurunan persamaan Euler dengan bantuan komputasi fisika. Persamaan gaya-gaya pada gerak *tippe top* harus direduksi agar permasalahan *tippe top* dapat diselesaikan. Dalam kajian ilmiah ini reduksi yang digunakan adalah reduksi Routhian, sehingga persamaan yang digunakan dalam menentukan persamaan gerak *tippe top* adalah persamaan Poincaré yang didasari oleh reduksi Routhian. Dengan metode ini dapat diturunkan gaya-gaya pada persamaan gerak *tippe top*, yang bergerak di bidang datar berupa himpunan persamaan diferensial.

*Kata kunci* : *tippe top*, metode Euler-Lagrange, Maple

### 1. Pendahuluan

Persamaan gaya-gaya gerak *tippe top* dirumuskan untuk *tippe top* yang bergerak di bidang datar dengan menggunakan berbagai metode seperti persamaan Euler dan persamaan Maxwell-Bloch. Penulis tertarik untuk merumuskan gaya-gaya pada *tippe top* jika dimainkan di bidang datar. Penulis terlebih dahulu akan meninjau gaya-gaya pada dinamika *tippe top* di bidang datar dengan persamaan Euler. Dinamika rotasi sulit dirumuskan dengan persamaan Euler-Lagrange karena dinamika rotasi mengandung kecepatan sudut yang pada umumnya bukanlah turunan waktu secara langsung dari koordinat umum. Hal ini disebabkan generator rotasi tidak komutatif, sehingga dinamika rotasi sulit jika diselesaikan dengan persamaan Euler-Lagrange. Persamaan Poincaré dipilih oleh penulis karena persamaan ini dapat merumuskan dinamika gasing balik dengan jelas. Selain itu, persamaan Poincaré dapat menggambarkan sistem dinamik berupa sistem persamaan diferensial. Kajian ilmiah ini merupakan upaya untuk memahami gerak *tippe top* dengan menggunakan teori grup dalam penyederhanaan persamaan gerak *tippe top* melalui persamaan Poincaré.

Asal usul penelitian tentang gerakan *tippe top* dijelaskan dalam sebuah buku tahun 1890 oleh John Perry (dalam Cohen, 1977) yang bereksperimen dengan memutar batu bulat yang ditemukan di Pantai. Perry menjelaskan bahwa batu bulat ini memiliki pusat massa yang tidak berimpit dengan pusat geometri batu tersebut. Ketika batu diputar, pusat massa menjadi lebih tinggi menjauhi permukaan tanah. Penjelasan mengenai gerakan gasing balik mulai dituangkan dalam beberapa artikel ilmiah sejak tahun 1950-an, di antaranya oleh Pliskin (1953) yang menyatakan bahwa interaksi gesekan pada gasing balik terhadap lantai berperan penting dalam putaran gasing balik. Sementara Sygne tahun 1952 (dalam Pliskin, 1953) menjelaskan bahwa fenomena gerakan gasing balik merupakan akibat ketidakstabilan dinamika tanpa melibatkan gesekan. Selanjutnya, Del Campo pada tahun 1955 (dalam Cohen,



1977) menjelaskan secara rinci dengan perhitungan matematis mengenai peranan gesekan pada gasing balik. Del Campo menyimpulkan bahwa gesekanlah yang memengaruhi peristiwa pembalikan pada *tippe top*. Penelitian ini bersifat kajian teoretis matematis. Penelitian dilakukan dengan tinjauan terhadap beberapa pustaka mengenai sistem mekanik pada kasus *tippe top* yang telah dikembangkan sebelumnya serta perhitungan matematis.

Persamaan gaya-gaya pada gerak *tippe top* harus direduksi agar permasalahan *tippe top* dapat diselesaikan. Dalam kajian ilmiah ini reduksi yang digunakan adalah reduksi Routhian, sehingga persamaan yang digunakan dalam menentukan persamaan gerak *tippe top* adalah persamaan Poincaré yang didasari oleh reduksi Routhian. Dengan metode ini dapat diturunkan gaya-gaya pada persamaan gerak *tippe top*, yang bergerak di bidang datar berupa himpunan persamaan diferensial.

## 2. Persamaan Gaya-gaya Tippe Top

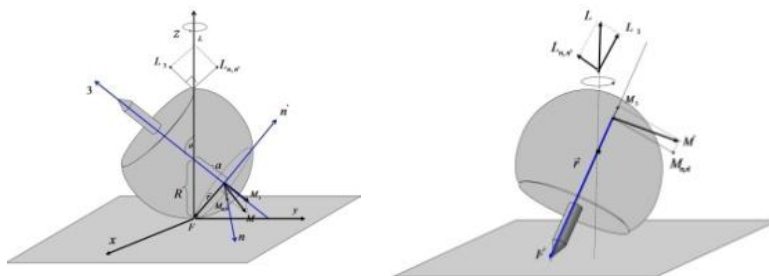
Persamaan Poincare dapat dituliskan dengan,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{s}^i} \right) - c^r_{ui}(q) s^l \frac{\partial \bar{T}}{\partial s^r} - \frac{\partial \bar{T}}{\partial \sigma^i} = S_i \quad (1)$$

Persamaan ini menuntut agar ditemukannya kecepatan kuasi sebagai turunan langsung terhadap waktu dari koordinat kuasi. Sementara, pada kasus gasing balik kecepatan kuasi yang dimiliki bukanlah turunan waktu secara langsung dari koordinat siklik. Oleh sebab itu, Persamaan Poincare yang digunakan dalam penelitian ini untuk menganalisis dinamika gasing balik di bidang datar dan permukaan dalam tabung adalah persamaan Poincare yang didasari dengan reduksi Routhian, yang dapat dituliskan sebagai berikut

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial v^p} - \sum_{\mu=2}^n \sum_{\lambda=2}^n c^{\lambda}_{\mu\rho} v^{\mu} \frac{\partial R}{\partial v^{\lambda}} - \sum_{\mu=2}^n c^{\lambda}_{\mu\rho} v^{\mu} \beta_1 - X_{\rho} R = 0 \quad (2)$$

Gerakan benda tegar digambarkan oleh dua persamaan vektor, yaitu  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$  untuk translasi pada pusat massa, dan  $\mathbf{M} = d\mathbf{L}/dt$  untuk rotasi di sekeliling pusat massa, dengan  $\mathbf{F}$  gaya eksternal total,  $\mathbf{p}$  momentum,  $\mathbf{M}$  momen total gaya eksternal, dan  $\mathbf{L}$  momentum sudut. Gasing balik terdiri dari bola dan batang silinder dengan pusat massa dapat berpindah dari pusat  $c$  pada bola, maksudnya dapat lurus di bawah pusat geometri atau lurus di atas pusat geometri.



Gambar 1. Proses Pembalikan *tippe top*

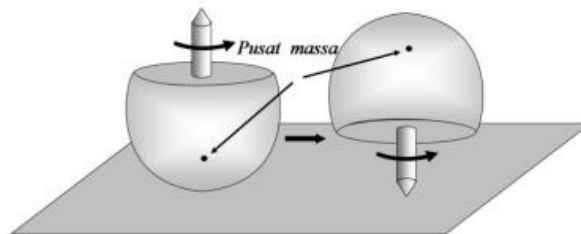
Awalnya gasing balik berputar di sekitar sumbu simetrinya yaitu  $\hat{e}_3$  secara vertikal, kemudian batang gasing balik secara perlahan bergerak turun dan akhirnya kepala membalik



ke atas dan berotasi secara vertikal dengan batang gasing balik. Rotasi mengubah arah gasing balik, sementara vektor  $\mathbf{L}$  tetap bertahan pada posisi vertikal aslinya. Selanjutnya, pusat massa bergerak ke atas akibat menurunnya nilai  $\mathbf{L}$ . Hal ini disebabkan oleh aksi gesekan  $\mathbf{F}$  pada titik kontak gasing balik terhadap meja.

Gaya gesek  $\mathbf{F}$  menyebabkan timbulnya momen gaya  $\mathbf{M}$ , yang dapat dibayangkan memiliki komponen vektor  $\mathbf{M}_{n,n'}$  dan  $\mathbf{M}_3$  di sepanjang sumbu simetri  $\hat{\mathbf{e}}_3$ . Demikian pula, momentum sudut  $\mathbf{L}$  memiliki komponen  $\mathbf{L}_{n,n'}$  dan  $\mathbf{L}_3$ . Pada awalnya,  $\mathbf{L}_3 = \mathbf{L}$  dan  $\mathbf{L}_{n,n'} = 0$ , akibat adanya ketidakstabilan, gaya gesekan menghasilkan  $\mathbf{M}_3$  yang menurunkan  $\mathbf{L}_3$ , sementara  $\mathbf{M}_{n,n'}$  mulai meningkatkan  $\mathbf{L}_{n,n'}$ . Karena  $\mathbf{L}$  bertahan konstan, sudut  $\theta$  yaitu sudut kemiringan gasing balik akan terus membesar, dan ketika  $\theta = \pi/2$ ,  $\mathbf{L}_3 = 0$  dan  $\mathbf{L}_{n,n'} = \mathbf{L}$ . Kemudian rotasi di sepanjang sumbu 3 berubah arah, dan karena aksi  $\mathbf{M}_{n,n'}$  dan  $\mathbf{M}_3$ ,  $\mathbf{L}_3$  mulai meningkat karena menurunnya  $\mathbf{L}_{n,n'}$ . Akhirnya, batang menyentuh meja karena aksi gaya gesekan dan momen gaya baru, yaitu  $\mathbf{F}'$  dengan momen torsi  $\mathbf{M}'$  yang membuat gasing balik dapat mengangkat dirinya sendiri dengan stabil. Komponen  $\mathbf{L}_{n,n'}$  dilambatkan oleh  $\mathbf{M}_{n,n'}$  yang baru dan akhirnya  $\mathbf{L}_3$  menjadi sama dengan  $\mathbf{L}$ .

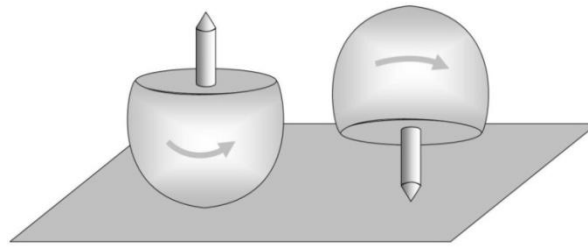
Selama proses inversi berlangsung pusat massa pada gasing balik ditinggikan. Hal ini menyatakan energi kinetik rotasional menurun selama inversi berlangsung akibatnya energi potensial mengalami peningkatan, sehingga kecepatan sudut total dan momentum sudut total menurun selama proses inversi. Proses ini dapat dilihat pada gambar (1) yang menunjukkan proses inversi pada gasing balik.



Gambar 2. Titik pusat massa pada gasing balik

### Mekanika Tippetop

*Tippetop* (gasing Balik) adalah mainan seperti gasing yang dapat berputar bebas kemudian membalik sendiri. Gasing balik terdiri dari bagian bola yang dilengkapi dengan batang silindris yang pendek. Gasing balik awalnya berputar dengan permukaan bolanya pada bidang, beberapa saat kemudian benda ini akan bergerak melawan gravitasi dengan mengangkat dirinya sendiri sehingga dapat bergerak berbalik berputar sambil mengangkat badannya ke atas untuk berputar dengan batang silindrisnya di atas permukaan.



Gambar 3. Gasing balik

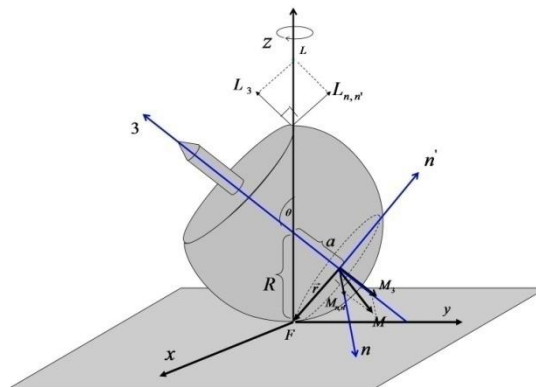
Gasing balik mengalami tiga tipe gerakan yaitu sebagai berikut,

1. (non-inversi) putaran gasing balik secara vertikal dengan pusat massa lurus di bawah pusat geometri.
2. (inversi) putaran gasing balik secara vertikal dengan pusat massa lurus di atas pusat geometri.
3. Putaran gasing balik *intermediate*, gasing balik berpresisi sambil berputar terhadap sumbunya. (Ciocci dkk., 1998)

Bou-rabee, dkk. (2004) telah menurunkan persamaan gerak gasing balik dengan modifikasi persamaan Maxwell-Bloch dan menjelaskan syarat kestabilan sistem polinomial pada pembalikan gasing balik. Bou-rabee dkk. juga menjelaskan persamaan gerak gasing balik menggunakan mekanika Newton dengan hukum gesekan dan persamaan yang tak berdimensi. Hasil yang didapat adalah persamaan linier untuk gasing balik dalam bentuk modifikasi persamaan Maxwell-Bloch dengan prinsip invariansi La-Salle untuk menentukan keadaan asimtotik pada gasing balik dan membandingkan syarat keberadaan pada koneksi heteroklinik dan syarat stabilitas linier untuk persamaan Maxwell-Bloch.

### Proses Pembalikan Gasing balik

Gerakan benda tegar digambarkan oleh dua persamaan vektor, yaitu  $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$  untuk translasi pada pusat massa, dan  $\mathbf{M} = d\mathbf{L}/dt$  untuk rotasi di sekeliling pusat massa, dengan  $\mathbf{F}$  gaya eksternal total,  $\mathbf{p}$  momentum,  $\mathbf{M}$  momen total gaya eksternal, dan  $\mathbf{L}$  momentum sudut. Gasing balik terdiri dari bola dan batang silinder dengan pusat massa dapat berpindah dari pusat  $c$  pada bola, maksudnya dapat lurus di bawah pusat geometri atau lurus di atas pusat geometri.

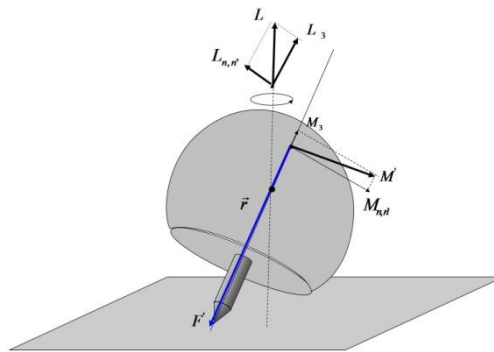


Gambar 4. Gerakan gasing baliksaat non-inversi



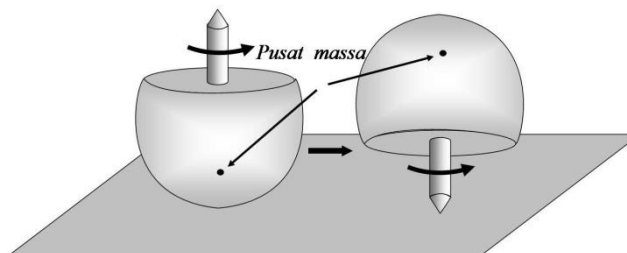
Awalnya gasing balik berputar di sekitar sumbu simetrinya yaitu  $\hat{e}_3$  secara vertikal, kemudian batang gasing balik secara perlahan bergerak turun dan akhirnya kepala membalik ke atas dan berotasi secara vertikal dengan batang gasing balik. Rotasi mengubah arah gasing balik, sementara vektor  $\mathbf{L}$  tetap bertahan pada posisi vertikal aslinya. Selanjutnya, pusat massa bergerak ke atas akibat menurunnya nilai  $L$ . Hal ini disebabkan oleh aksi gesekan  $\mathbf{F}$  pada titik kontak gasing balik terhadap meja.

Gaya gesek  $\mathbf{F}$  menyebabkan timbulnya momen gaya  $\mathbf{M}$ , yang dapat dibayangkan memiliki komponen vektor  $\mathbf{M}_{n,n'}$  dan  $\mathbf{M}_3$  di sepanjang sumbu simetri  $\hat{e}_3$ . Demikian pula, momentum sudut  $\mathbf{L}$  memiliki komponen  $L_{n,n'}$  dan  $L_3$ . Pada awalnya,  $L_3 = L$  dan  $L_{n,n'} = 0$ , akibat adanya ketidakstabilan, gaya gesekan menghasilkan  $\mathbf{M}_3$  yang menurunkan  $L_3$ , sementara  $\mathbf{M}_{n,n'}$  mulai meningkatkan  $L_{n,n'}$ . Karena  $\mathbf{L}$  bertahan konstan, sudut  $\theta$  yaitu sudut kemiringan gasing balik akan terus membesar, dan ketika  $\theta = \pi/2$ ,  $L_3 = 0$  dan  $L_{n,n'} = L$ . Kemudian rotasi di sepanjang sumbu 3 berubah arah, dan karena aksi  $\mathbf{M}_{n,n'}$  dan  $\mathbf{M}_3$ ,  $L_3$  mulai meningkat karena menurunnya  $L_{n,n'}$ . Akhirnya, batang menyentuh meja karena aksi gaya gesekan dan momen gaya baru, yaitu  $\mathbf{F}'$  dengan momen torsi  $\mathbf{M}'$  yang membuat gasing balik dapat mengangkat dirinya sendiri dengan stabil. Komponen  $L_{n,n'}$  dilambatkan oleh  $\mathbf{M}_{n,n'}$  yang baru dan akhirnya  $L_3$  menjadi sama dengan  $L$ .



**Gambar 5. Gerakan gasing baliksaat inversi**

Selama proses inversi berlangsung pusat massa pada gasing balik ditinggikan. Hal ini menyatakan energi kinetik rotasi menurun selama inversi berlangsung akibatnya energi potensial mengalami peningkatan, sehingga kecepatan sudut total dan momentum sudut total menurun selama proses inversi. Proses ini dapat dilihat pada gambar (3.2) dan gambar (3.3) yang menunjukkan proses inversi pada gasing balik.



**Gambar 6. Titik pusat massa pada tippe top**

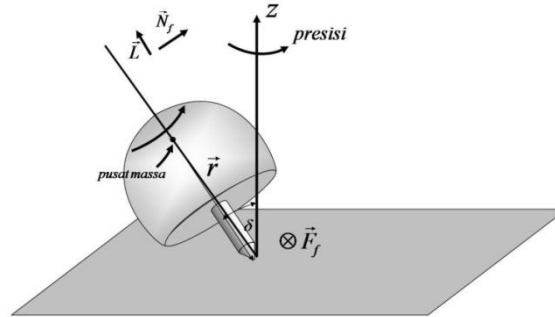
Penurunan momentum sudut ini memerlukan suatu gaya yang dapat menjamin terjadinya peristiwa inversi tersebut. Gaya yang berperan dalam hal ini adalah torsi. Jika tidak ada gaya gesek yang terjadi maka gaya eksternal yang bekerja pada gasing balik adalah



gravitasi dan gaya normal yang diberikan oleh meja pada titik kontak gasing balik. Gaya-gaya ini terjadi di sepanjang sumbu  $z$  akibatnya gaya-gaya ini tidak dapat menghasilkan torsi pada sumbu tersebut, sehingga gaya ini tidak dapat berperan dalam perubahan momentum sudut pada komponen sumbu  $z$ . Oleh karena itu, perilaku gasing balik ini harus melibatkan gaya gesek (Cohen, 1977).

### Pengaruh gesekan pada gasing balik

Sebuah gasing balik yang simetri sumbu dipasang pada poros dengan radius tertentu. Putaran diatur pada sumbu simetrinya di atas permukaan dengan sudut  $\delta$  terhadap sumbu vertikal gambar (5). Momentum sudut  $\vec{L}$  tidak begitu sejajar dengan sumbu gasing balik, karena ada gerak presesi pada pusat massa gasing balik. Selain itu, gerakan berputar (*spin*) pada gasing balik lebih cepat pada sumbunya simetri.

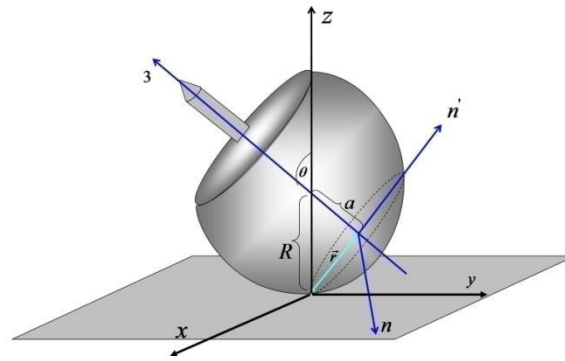


Gambar 7. Diagram presisi pada tipe top

Sebuah koefisien gesekan kecil menginduksi gaya gesekan yang melawan gerakan tepi batang terhadap permukaan meja. Kecepatan sesaat titik kontak terhadap tepi batang merupakan hasil utama dari putaran gasing balik pada sumbu simetrinya. Jadi, gaya gesekan pada gambar (6) menunjuk ke arah dalam kertas. Gaya ini menghasilkan torsi  $\vec{M}_f$  di sekitar pusat massa,

$$\vec{M}_f = \vec{r} \times \vec{F}_f \quad (3.1)$$

Torsi  $\vec{M}_f$  tegak lurus terhadap vektor  $\vec{r}$ , dan cenderung menyelaraskan momentum sudut  $\vec{L}$  terhadap sumbu vertikal. Arah gasing balik mengikuti arah  $\vec{L}$  dan gasing balik berusaha menyesuaikan badannya mengikuti arah  $\vec{L}$ . Akan tetapi, analisis semacam ini tidak cukup untuk menghitung dinamika gasing balik karena momentum sudut pada gasing balik di sepanjang sumbu  $z$  positif selama proses inversi bukan di sepanjang sumbu simetrinya. Selain itu, analisis dinamika gasing balik harus memperhitungkan perubahan vektor  $\vec{r}$  sebagai fungsi dari sudut inklinasi.

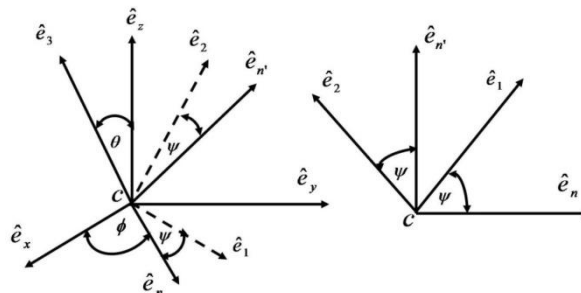


Gambar 8. Skema gasing balik

Berdasarkan gambar (7) didefinisikan bahwa sistem koordinat  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$  tetap terhadap tubuh gasing balik dengan  $\hat{e}_3$  paralel dengan batang gasing balik, sedangkan  $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$  adalah sistem koordinat tetap dalam kerangka acuan buatan dengan  $\hat{e}_z$  mengarah ke atas dan tegak lurus terhadap permukaan meja. Selanjutnya didefinisikan sistem koordinat  $\hat{e}_n, \hat{e}_{n'}, \hat{e}_3$  melalui persamaan berikut

$$\hat{e}_n = \frac{\hat{e}_z \times \hat{e}_3}{|\hat{e}_z \times \hat{e}_3|} \quad (3.2)$$

sedangkan  $\hat{e}_{n'} = \hat{e}_3 \times \hat{e}_n$ . Vektor satuan  $\hat{e}_n, \hat{e}_{n'}$  pada bidang di mana vektor  $\hat{e}_1, \hat{e}_2$  berotasi, seperti yang didefinisikan pada gambar (8) di bawah ini,



Gambar 9. Sumbu-sumbu koordinat pada gasing balik

dengan menggunakan sudut Euler  $\theta, \phi, \psi$  yang didefinisikan pada gambar (9), dapat dituliskan persamaan transformasi yang menghubungkan sistem koordinat  $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$  dan  $\hat{e}_n, \hat{e}_{n'}, \hat{e}_3$ . Untuk mendapatkan hubungan tersebut langkah pertama adalah sumbu koordinat spasial diputar dengan  $\hat{e}_z$  sebagai sumbu putarnya, sehingga dari gambar (9) didapatkan hubungan

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_n \\ \hat{e}_{n'} \\ \hat{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \\ \hat{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi \hat{e}_x + \sin \phi \hat{e}_y \\ -\sin \phi \hat{e}_x + \cos \phi \hat{e}_y \\ \hat{e}_z \end{bmatrix}$$

kemudian dilanjutkan dengan memutar sumbu koordinat dengan sumbu putar sumbu  $\hat{e}_n$ , sehingga didapatkan,

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_n \\ \hat{e}_{n'} \\ \hat{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi \hat{e}_x + \sin \phi \hat{e}_y \\ -\sin \phi \hat{e}_x + \cos \phi \hat{e}_y \\ \hat{e}_z \end{bmatrix}$$





$$\begin{bmatrix} \hat{e}_n \\ \hat{e}_{n'} \\ \hat{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi \hat{e}_x + \sin \phi \hat{e}_y \\ -\sin \phi \cos \theta \hat{e}_x + \cos \phi \cos \theta \hat{e}_y + \sin \theta \hat{e}_z \\ \sin \phi \sin \theta \hat{e}_x - \cos \phi \sin \theta \hat{e}_y + \cos \theta \hat{e}_z \end{bmatrix}$$

sehingga transformasinya adalah

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_n \\ \hat{e}_{n'} \\ \hat{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & -\cos \phi \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \\ \hat{e}_z \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

dengan transformasi balik dari persamaan (3.3) didapatkan persamaan,

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \\ \hat{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\cos \theta \sin \phi & \sin \theta \sin \phi \\ \sin \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \theta \cos \phi \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{e}_n \\ \hat{e}_{n'} \\ \hat{e}_3 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Kecepatan sudut  $\vec{\omega}$  gasing balik dalam suku koordinat  $\hat{e}_n, \hat{e}_{n'}, \hat{e}_3$  yaitu

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \dot{\theta} \hat{e}_n + \dot{\phi} \hat{e}_z + \dot{\psi} \hat{e}_3 \\ &= \dot{\theta} \hat{e}_n + \dot{\phi} (\sin \theta \hat{e}_{n'} + \cos \theta \hat{e}_3) + \dot{\psi} \hat{e}_3 \\ &= \dot{\theta} \hat{e}_n + \dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_{n'} + \dot{\phi} \cos \theta \hat{e}_3 + \dot{\psi} \hat{e}_3 \\ &= \dot{\theta} \hat{e}_n + \dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_{n'} + (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}) \hat{e}_3 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Kecepatan sudut  $\vec{\omega}$  merupakan kecepatan sudut total *tippe top* pada sistem koordinat  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ , yang diungkapkan dalam sistem koordinat  $\hat{e}_n, \hat{e}_{n'}, \hat{e}_3$ .

Hal yang sama untuk ungkapan kecepatan sudut  $\vec{\alpha}$  pada sistem koordinat  $\hat{e}_n, \hat{e}_{n'}, \hat{e}_3$  yaitu

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} &= \ddot{\theta} \hat{e}_n + \dot{\phi} \hat{e}_z = \ddot{\theta} \hat{e}_n + \dot{\phi} (\sin \theta \hat{e}_{n'} + \cos \theta \hat{e}_3) \\ &= \ddot{\theta} \hat{e}_n + \dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_{n'} + \dot{\phi} \cos \theta \hat{e}_3 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Kecepatan sudut  $\vec{\alpha}$  merupakan kecepatan sudut total spasial pada sistem koordinat  $\hat{e}_n, \hat{e}_{n'}, \hat{e}_3$ , yang diukur dalam kerangka buatan. Dari gambar (9) dapat dinyatakan bahwa  $\dot{\phi} \gg \dot{\theta}$ , untuk gasing balik yang berpresisi lebih cepat ternyata kecepatan sudutnya lebih lambat. Begitupun, kecepatan presisi  $\dot{\phi}$ , secara substansial nilainya lebih besar daripada  $|\dot{\psi}|$ . Nilai  $|\dot{\psi}|$  pada gasing balik lebih kecil dibandingkan dengan *conventional top*, dapat dijelaskan dengan lengan momen yang relatif besar.  $R \sin \theta$ , dimana gaya gesek bertindak untuk menghambat rotasi terhadap sumbu simetri. Pada *conventional top*, gaya gesek beraksi dengan lengan momen sama dengan radius bolanya gambar (7).

Gaya gesekan diterapkan pada titik  $T$  yang melawan gerakan titik  $T$  pada bidang permukaan meja. Jika momen gerak translasi diabaikan pada gasing balik, maka gaya gesek  $F_f$  ini akan menunjuk ke dalam kertas sepanjang sumbu  $\hat{e}_n$ . Gaya gesek ini menghasilkan torsi  $\vec{M}_f$  pada pusat massa, ungkapan torsi ini adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} \vec{M}_f &= \vec{r} \times \vec{F}_f \\ &= (a \hat{e}_3 - R \hat{e}_z) \times (-|F_f| \hat{e}_n) \\ &= (a \hat{e}_3 - R (\sin \theta \hat{e}_{n'} + \cos \theta \hat{e}_3)) \times (-|F_f| \hat{e}_n) \\ &= (a \hat{e}_3 - R \sin \theta \hat{e}_{n'} + R \cos \theta \hat{e}_3) \times (-|F_f| \hat{e}_n) \\ &= |F_f| (a \hat{e}_3 - R \sin \theta \hat{e}_{n'} + R \cos \theta \hat{e}_3) \times (-\hat{e}_n) \\ &= |F_f| [(R \cos \theta - a) \hat{e}_{n'} - R \sin \theta \hat{e}_3] \end{aligned} \quad (3.7)$$





karena torsi akibat gaya normal beraksi pada sumbu  $\hat{e}_z$ , maka torsi gesekan  $N_f$  ini hanya torsi dengan komponen pada sumbu  $\hat{e}_{n'}$  dan sumbu  $\hat{e}_3$ . Jika  $\theta < \cos^{-1}\left(\frac{a}{R}\right)$ , maka torsi pada  $\hat{e}_{n'}$  positif dan torsi pada  $\hat{e}_3$  negatif. Jadi, diharapkan  $\alpha_{n'}$  meningkat sebagai fungsi waktu sedangkan  $\alpha_3$  menurun. Ini menyatakan bahwa rasio  $\alpha_3/\alpha_{n'}$  adalah

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_{n'}} = \frac{\dot{\phi} \cos \theta}{\dot{\phi} \sin \theta} = \cot \theta \quad (3.8)$$

didapatkan dari ungkapan

$$\vec{\alpha} = \dot{\theta} \hat{e}_n + \dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_{n'} + \dot{\phi} \cos \theta \hat{e}_3$$

secara monoton menurun terhadap waktu, jadi  $\theta$  akan meningkat secara monoton.

Gaya yang timbul dari gesekan akan cenderung menghambat gerak titik  $T$  pada bidang meja. Jadi, kinematika harus dianalisis pada permasalahan ini untuk mendapatkan persamaan kecepatan pada titik  $T$  dalam suku-suku parameter yang lain. Andaikan  $\vec{v}_{TC}$  mewakili kecepatan titik  $T$  terhadap pusat massa gasing balik

$$\begin{aligned} \vec{v}_{TC} &= \vec{\omega} \times \vec{r} \\ &= [(\dot{\theta} \hat{e}_n + \dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_{n'} + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \hat{e}_3) \times (a \hat{e}_3 - R \hat{e}_z)] \\ &= [(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \hat{e}_3 + \dot{\theta} \hat{e}_n + \dot{\phi} \sin \theta \hat{e}_{n'}] \times (a - R \cos \theta) \hat{e}_3 - R \sin \theta \hat{e}_{n'} \\ &= (R \dot{\psi} + a \dot{\phi}) \sin \theta \hat{e}_n + \dot{\theta} (R \cos \theta - a) \hat{e}_{n'} - \dot{\theta} R \sin \theta \hat{e}_3. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Andaikan  $\vec{v}_{TCP}$  mewakili proyeksi pada  $\vec{v}_{TC}$  pada bidang  $xy$ , dengan menggunakan transformasi persamaan (3.3), sehingga persamaan (3.9) menjadi

$$\begin{aligned} \vec{v}_{TCP} &= [(R \dot{\psi} + a \dot{\phi}) \sin \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi (a \cos \theta - R)] \hat{e}_x \\ &\quad + [(R \dot{\psi} + a \dot{\phi}) \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi (R - a \cos \theta)] \hat{e}_y \end{aligned} \quad (3.10)$$

Pada gambar (7) perhatikan bahwa bola dengan radius  $R$  memiliki distribusi massa simetri secara aksial tetapi tidak simetri secara sferikal, sehingga pusat massa dan pusat geometri tidak berimpit. Garis penghubung pusat massa dan pusat geometri adalah sebuah sumbu pada simetri inersial, dan garis ini berada pada bidang tegak lurus terhadap sumbu tensor momen inersia pada bola yang memiliki dua momen inersia yang sama, yaitu  $I_n = I_{n'} = I$ . Momen inersia sepanjang sumbu simetri dinotasikan dengan  $I_3$  dan total massa gasing balik tersebut adalah  $m$ . Eksentrisitas  $a$  adalah jarak antara pusat massa  $O$  dan pusat geometri  $c$  pada bola dengan  $0 < a < R$ . Titik  $T$  adalah titik kontak dengan bidang datar. Gaya eksternal tipe top terdiri dari gaya normal, gravitasi, dan gaya gesek antara tipe top dan meja. Gesekan beraksi melawan gerakan di titik  $T$ , dan besar gesekan ini sebanding dengan gaya normal oleh meja pada titik  $T$ . Gaya gesek yang didapat adalah

$$F_f = -(\mu m(\ddot{z} + g)) \frac{\left[ (\dot{x} + (R \dot{\psi} + a \dot{\phi}) \sin \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi (a \cos \theta - R)) \hat{e}_x + (\dot{y} + (R \dot{\psi} + a \dot{\phi}) \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi (R - a \cos \theta)) \hat{e}_y \right]}{\sqrt{\left[ (\dot{x} + (R \dot{\psi} + a \dot{\phi}) \sin \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi (a \cos \theta - R))^2 + (\dot{y} + (R \dot{\psi} + a \dot{\phi}) \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi (R - a \cos \theta))^2 \right]}}$$

dengan gaya normal sebesar

$$\begin{aligned} F_N &= (m a (\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta) + m g) \hat{e}_z \\ &= m (\ddot{z} + g) \hat{e}_z \end{aligned}$$



sehingga didapat momen gaya (torsi) pada tipe top secara lengkap didapat sebesar

$$\begin{aligned} N_3 &= I_3(\ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta + \ddot{\psi}) \\ N_n &= I\ddot{\theta} + I_3\dot{\phi}\dot{\psi} \sin \theta + (I_3 - I)\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \\ N_{n'} &= I\ddot{\phi} \sin \theta + (2I - I_3)\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta - I_3\dot{\theta}\dot{\psi} \end{aligned}$$

#### 4. Simpulan

Berdasarkan kajian teori yang telah dilakukan dapat disimpulkan bahwa dengan bantuan komputasi, gaya eksternal benda dapat dirumuskan lebih mudah dibandingkan dengan menghitung secara manual. Perkembangan teknologi dapat dimanfaatkan secara maksimal untuk pembelajaran. Perhitungan yang rumit dapat diselesaikan dengan lebih mudah dengan komputasi fisika. Gaya eksternal tipe top yang didapat terdiri dari gaya normal, gravitasi, dan gaya gesek antara tipe top dan meja. Gesekan beraksi melawan gerakan di titik  $T$ , dan besar gesekan ini sebanding dengan gaya normal oleh meja pada titik  $T$ . Gaya gesek yang didapat adalah

$$F_f = -(\mu m(\ddot{z} + g)) \frac{\begin{bmatrix} (\dot{x} + (R\dot{\psi} + a\dot{\phi}) \sin \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi (a \cos \theta - R)) \hat{e}_x \\ + (\dot{y} + (R\dot{\psi} + a\dot{\phi}) \sin \theta \cos \phi + \dot{\theta} \cos \phi (R - a \cos \theta)) \hat{e}_y \end{bmatrix}}{\sqrt{\begin{bmatrix} (\dot{x} + (R\dot{\psi} + a\dot{\phi}) \sin \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi (a \cos \theta - R))^2 \\ + (\dot{y} + (R\dot{\psi} + a\dot{\phi}) \sin \theta \cos \phi + \dot{\theta} \cos \phi (R - a \cos \theta))^2 \end{bmatrix}}}$$

dengan gaya normal sebesar

$$\begin{aligned} F_N &= (ma(\dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta) + mg) \hat{e}_z \\ &= m(\ddot{z} + g) \hat{e}_z \end{aligned}$$

sehingga didapat momen gaya (torsi) pada *tipe top* secara lengkap didapat sebesar

$$\begin{aligned} N_3 &= I_3(\ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta + \ddot{\psi}) \\ N_n &= I\ddot{\theta} + I_3\dot{\phi}\dot{\psi} \sin \theta + (I_3 - I)\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \\ N_{n'} &= I\ddot{\phi} \sin \theta + (2I - I_3)\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta - I_3\dot{\theta}\dot{\psi} \end{aligned}$$

#### Daftar Rujukan

- Bou-Rabee, N. M. Marsden, J. E. dan Romero, L. A. 2004. Tippe Top Inversion as a Dissipation-Induced Instability, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 3, 352–377.
- Bou-Rabee, N. M. Marsden, J. E. dan Romero, L. A. 2008. Dissipation-Induced Heteroclinic Orbits in Tippe top, *SIAM J. Appl.* Vol 50. No.2. pp. 325-344.
- Bloch, A. M., 2003, *Holonomic Mechanics and Control*, Springer-Verlag, New York.
- Ciocci, M.C., Malengier, B., and Langerock, B. 1998. Towards a Prototype of a Spherical Tippe top, *Am. J. Phys.* 45.1-27.



- Glad, Torkel, Paterson, Daniel, dan Wojciechowski, Rauch. 2007. Phase Space of Rolling Solution of the tippe top. *Sigma* 3, 1-14.
- Gray, C.G. Nickel. B.G. 2000. Constants of the motion for nonslipping tippe tops and other tops with round pegs. *Am. J. Phys.* 68 (9), 821–828.
- Hall, Brian C. 2003. *Lie Groups, Lie algebras, and representations*-Verlag.